Materiales para la familia

Exponentes y notación científica

Repaso de exponentes

Materiales para la familia 1

Esta semana nuestros estudiantes van a aprender las reglas para multiplicar y dividir expresiones con exponentes. Los exponentes son una forma de llevar la cuenta de cuántas veces un número se ha multiplicado repetidamente por sí mismo. Por ejemplo, en vez de escribir $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$, podemos escribir 8^7. El número que se multiplica repetidamente se llama la base, que en este ejemplo es 8. El 7, en este ejemplo, se llama el exponente.

Usando nuestra comprensión de la multiplicación repetida, descubriremos varias "reglas" para los exponentes. Por ejemplo, supongamos que queremos comprender la expresión $10^3 \cdot 10^4$. Si la reescribimos para obtener todos los factores, obtenemos $(10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)$. Como esto es, en realidad, 7 veces el número 10 multiplicado por sí mismo, podemos escribir $10^3 \cdot 10^4 = 10^7$. Al contar los factores 10 repetidos, hemos sumado los exponentes (hay 3 de ellos y luego 4 más). Esto nos lleva a comprender una regla más general sobre exponentes: cuando multiplicamos potencias con la misma base, sumamos los exponentes:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Si usamos un razonamiento similar, podemos descubrir que al trabajar con potencias de potencias multiplicamos los exponentes:

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

Estas reglas nos llevarán a otros descubrimientos más adelante.

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

1. Jada y Noah trataban de comprender la expresión $10^4 \cdot 10^5$. Noah dijo: "Como estamos multiplicando, vamos a obtener 10^{20}". Jada dijo: "Pero no creo que, a partir de $10^4 \cdot 10^5$, puedas obtener 20 veces el número 10 multiplicado por sí mismo". ¿Están de acuerdo con alguno de los dos?

2. Más tarde, Jada y Noah pensaban en una expresión similar: $\left(10^4\right)^5$. Noah dijo: "Esta sería 10^{20}, pues tendríamos 5 grupos de 4". Jada dijo: "Estoy de acuerdo con que será 10^{20}, pero porque habrá 4 grupos de 5". ¿Están de acuerdo con alguno de los dos?

Solución:

1. Jada tiene razón. Reescribir $10^4 \cdot 10^5$ para mostrar todos los factores da como resultado $(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)$. Podemos ver que, en total, hay 9 números 10 que se están multiplicando. Esto nos ayuda a comprender lo que hay detrás de la regla para escribir $10^4 \cdot 10^5 = 10^{4+5} = 10^9$.

2. Esta vez Noah tiene razón. Cuando tenemos $\left(10^4\right)^5$, el exponente de afuera (el 5) nos indica que se multiplica el 10^4 repetidamente 5 veces. Por lo tanto $\left(10^4\right)^5 = 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^4$. Esto significa que hay 5 grupos de 4 números 10 siendo multiplicados. Podríamos escribir esto de la forma larga como $\left(10^4\right)^5 = (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 1$
Esto nos ayuda a comprender lo que hay detrás de la regla para escribir $\left(10^4\right)^5 = 10^{4 \cdot 5} = 10^{20}$.

Notación científica

Materiales para la familia 2

Esta semana, nuestros estudiantes van a usar potencias de 10 para trabajar con números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, la Casa de la Moneda de los Estados Unidos ha producido más de 500,000,000,000 de monedas de un centavo. Para comprender este número, debemos contar todos los ceros. Como hay 11 ceros, podemos decir que hay 500 mil millones de monedas de un centavo. Si usamos potencias de 10, podemos escribir esto como $5 \cdot 10^{11}$. La ventaja de este tipo de escritura es que podemos ver, inmediatamente, cuántos ceros hay (11). Esto nos permite comparar números escritos de esta forma de un modo más eficiente. Lo mismo es cierto para cantidades pequeñas. Por ejemplo, un átomo de carbono pesa aproximadamente 0.0000000000000000000000199 gramos. Si usamos potencias de 10 para reescribir esto, se convierte en $(1.99) \cdot 10^{-23}$.

Las potencias de 10 no solo facilitan la escritura de este número, sino que también ayudan a evitar errores (¡pues sería muy fácil, al escribir el decimal, olvidar un cero o poner uno de más sin darse cuenta!). Esta forma de escribir los números se llama notación científica. Podemos usar las reglas de los exponentes que ya aprendimos para estimar y resolver problemas con notación científica.

Esta es una tarea para que trabajen en familia:

Esta tabla muestra la rapidez máxima de varios vehículos.

vehículo	rapidez (kilómetros por hora)
auto deportivo	$(4.15) \cdot 10^2$
módulo de comando y servicio de la nave Apollo (Apollo CSM)	$(3.99) \cdot 10^4$
lancha con propulsión a chorro	$(5.1) \cdot 10^2$
dron autónomo	$(2.1) \cdot 10^4$

1. Organicen los vehículos del más rápido al más lento.
2. La máxima rapidez de un trineo cohete es 10,326 kilómetros por hora. ¿Es más rápido o más lento que el dron autónomo?

3. Estimen cuántas veces tan rápido como el auto deportivo, es el módulo de comando y servicio del Apollo (Apollo CSM).

Solución:

1. El orden es: Apollo CSM, dron autónomo, lancha con propulsión a chorro, auto deportivo. Como todo los valores están dados en notación científica, podemos mirar la potencia de 10 para compararlos. La rapidez del Apollo CSM y el dron autónomo tienen la mayor potencia de 10 (10^4), por lo tanto son los más rápidos. El Apollo CSM es más rápido que el dron porque 3.99 es mayor que 2.1. De forma similar, la lancha con propulsión a chorro es más rápida que el auto deportivo porque sus rapideces tienen la misma potencia de 10 (10^2) pero 5.1 es mayor que 4.15.
2. El dron autónomo es más rápido que el trineo cohete. La rapidez del trineo cohete (en notación científica) es $1.0326 \cdot 10^4$, la rapidez del dron es $2.1 \cdot 10^4$, y 2.1 es mayor que 1.0326.
3. Para encontrar cuántas veces tan rápido como el auto deportivo es el Apollo CSM, debemos averiguar qué número multiplicado por $4.15 \cdot 10^2$ es igual a $3.99 \cdot 10^4$. Por lo tanto, debemos calcular $\frac{3.99 \cdot 10^4}{4.15 \cdot 10^2}$. Como estamos estimando, podemos simplificar el cálculo a $\frac{4 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^2}$. Ahora, si usamos reglas de exponentes y nuestra comprensión de fracciones, obtenemos $\frac{4 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^2} = 1 \cdot 10^{4-2} = 10^2$. Así, ¡el Apollo CSM es aproximadamente 100 veces tan rápido como el auto deportivo!